Chapitre 2

Ajustements

Dans beaucoup de recherches statistiques, on ne s'intéresse pas qu'à un seul caractère mais à plusieurs en même temps. On s'occupe alors fréquemment de leur dépendance les uns avec les autres.

Quand on considère deux caractères x et y, un **couple** de valeurs $(x_i; y_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ correspond à chacun des n individus de la population. L'ensemble des couples obtenus est appelé **série statistique double**.

On représente généralement cette série dans un repère cartésien. Cette représentation graphique de tous les couples $(x_i; y_i)$ de la série est appelée **nuage de points**. Quand il existe une relation entre les deux caractères, on peut *résumer* le nuage de points par une courbe telle que le nuage de points a une forte densité au voisinage de la courbe et faible ailleurs.

Définition 2.1
La démarche d'**ajustement** consiste à déterminer une courbe C qui *résume* un nuage de points.

La courbe C permet d'**estimer** les valeurs d'un caractère en fonction de valeurs de l'autre caractère. Les valeurs ainsi estimées sont des **approximations**.

Lorsque cette courbe est une droite, on parle d'**ajustement linéaire**.

2.1 Ajustements linéaires

On considère ici les n points d'un nuage représentant la série des n couples de valeurs (x_i, y_i) de deux caractères x et y déterminés à partir d'une population de n individus. L'ajustement d'une droite D à ce nuage de points consiste à remplacer chaque point $(x_i; y_i)$ par un point de même abscisse et d'ordonné $\hat{y}_i$, les points $(x_i, \hat{y}_i)$ étant alignés sur la droite D.

Il existe plusieurs possibilités d'effectuer ceci. Le problème qu'on peut se poser est de trouver la "meilleure" droite qui résume le nuage de points.

Une fois l'équation de la droite D déterminée, on pourra l'utiliser pour faire des *interpolations* (calculs de valeurs intermédiaires) et des *extrapolations* (calculs de valeurs futures).

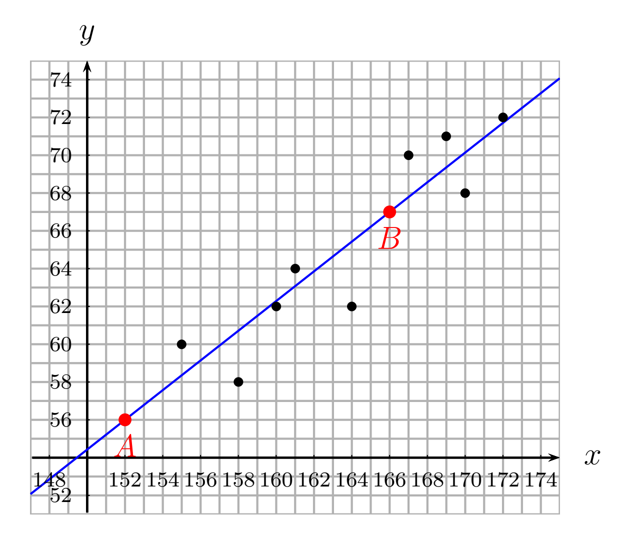
2.1.1 Ajustement linéaire graphique

Nous allons travailler sur un exemple pour donner l'idée de la démarche à mettre en oeuvre.

Lors d'une expérience, on a étudié les caractères taille (caractère x) en cm et masse (caractère y) en kg de 9 personnes (expérience fictive). On a obtenu les résultats suivants :

Taille (x_i)	155	158	160	161	164	167	169	170	172
Masse (y_i)	60	58	62	64	62	70	71	68	72

La méthode graphique consiste à tracer, à l'**œil**, à l'aide d'une règle transparente, une droite $y = mx + h$ s'ajustant le mieux possible au nuage de points.



Une fois la droite tracée, on choisit sur le dessin deux points A et B quelconques de la droite pour en déterminer l'équation. Ces points ne doivent pas obligatoirement faire partie du nuage de points.

L'équation de la droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par :

$$y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B)$$

Les points A et B choisis dans notre exemple ont comme coordonnées $(152; 56)$ et $(166; 67)$. La droite passant par ces deux points est :

$$y - 67 = \frac{67 - 56}{166 - 152}(x - 166)$$

On obtient après simplification : $y = 0,78x - 63,43$.

L'équation de la droite étant déterminée et les valeurs de x étant fixées, on peut en déduire les **valeurs ajustées** correspondantes du caractère y et **extrapoler** la masse d'une personne mesurant 180 cm.

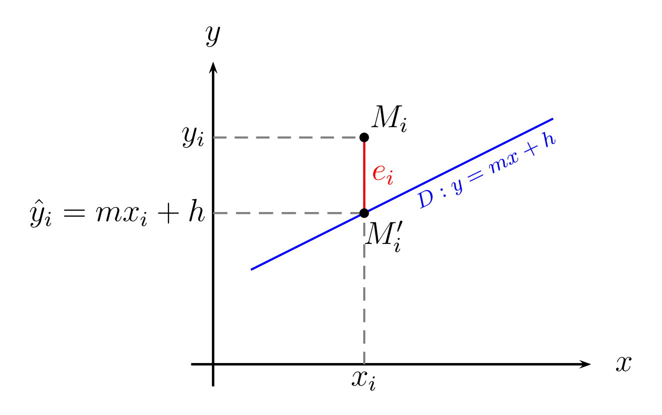
Taille (x_i)	155	158	160	161	164	167	169	170	172	*180*
Masse ($\widehat{y_i}$)	58,4	60,7	62,3	63,1	65,4	67,8	69,4	70,1	71,7	*78,0*

2.1.2 Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

Remarque préliminaire

On considère à nouveau les n points $M_i(x_i; y_i)$ d'un nuage de points. Soit maintenant une droite D quelconque d'équation $y = mx + h$. On appelle e_i l'écart du point M_i à la droite D :

$$e_i = \overline{M_i'M_i} = y_i - (mx_i + h)$$



A quelle condition doit satisfaire la droite D pour que la somme des écarts des points M_i à la droite soit nulle : $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$? Cette relation s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - h) = 0$$

ou :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot h = 0$$

ou enfin :

$$\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}_{\overline{y}} - m \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}_{\overline{x}} - h = 0$$

Elle signifie donc que la droite D passe par le *point moyen* ω, ayant pour abscisse la moyenne $\overline{x}$ des abscisses et pour ordonnée la moyenne $\overline{y}$ des ordonnées.

Ainsi la condition $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ ne suffit pas à déterminer la droite D, puisqu'elle lui impose uniquement de passer par un point. De plus, cette condition n'est pas satisfaisante du point de vue de l'ajustement : elle exige seulement que les écarts s'équilibrent algébriquement (les écarts peuvent être grands en valeur absolue).

Droite de Mayer

Une droite étant déterminée par deux points, le résultat ci-dessus conduit au procédé suivant.

On divise l'ensemble des points M_i en 2 sous-ensembles , à peu près d'égale importance, et tels que l'abscisse de tout point du premier soit inférieure à l'abscisse de tout point du second. On les appelle sous-ensemble de gauche et sous-ensemble de droite.

La droite D d'ajustement de Mayer doit alors vérifier les deux conditions :

– la somme des écarts des points du sous-ensemble de gauche est nulle ⇒ D passe par le point moyen ω_g du sous-ensemble de gauche,
– la somme des écarts des points du sous-ensemble de droite est nulle ⇒ D passe par le point moyen ω_d du sous-ensemble de droite.

Remarques

1) Comme la somme des écarts pour l'ensemble total est nulle, la droite de Mayer passe par le point moyen ω de l'ensemble total.
2) On sépare l'ensemble de points en sous-ensemble de gauche et sous-ensemble de droite pour que les points moyens de ces sous-ensembles soient les plus éloignés possible, de façon à augmenter la précision dans la détermination de la droite.

Exemple

On reprend ici les données du paragraphe précédent sur la taille et la masse de 9 personnes. On divise tout d'abord l'ensemble des couple en deux sous-ensembles :
– sous-ensemble de gauche : longueur de 155 cm à 164 cm,
– sous-ensemble de droite : longueur de 167 cm à 172cm.
On calcule ensuite les points moyens de ces deux sous-ensembles :

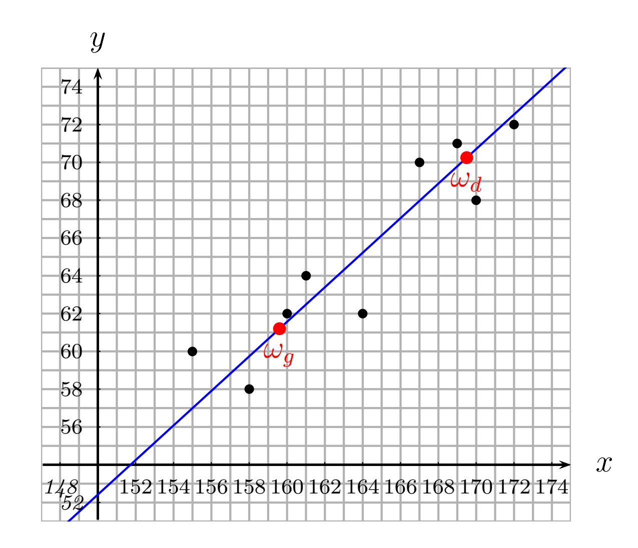
$$\omega_g(159,6;61,2) \qquad \textit{et} \qquad \omega_d(169,5;70,25)$$

La droite de Mayer cherchée passe par ces deux points :

$$y - 61,2 = \frac{70,25 - 61,2}{169,5 - 159,6}(x - 159,6)$$

On obtient après simplification : $y = 0.91x - 84,70$.

Graphiquement, on obtient l'ajustement suivant :



2.1.3 Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

On considère toujours les n points $M_i(x_i; y_i)$ d'un nuage de points. L'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés consiste à déterminer la droite (que l'on appelle aussi **droite de régression**) telle que la somme des carrés des n écarts $e_i = y_i - \hat{y}_i$ soit

minimale (ce qui explique le nom de la méthode), où $\hat{y}_i$ est l'ordonnée du point de la droite de régression d'abscisse x_i. On veut donc minimiser la quantité

$$q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Mise en place de la méthode

1) On s'intéresse d'abord au problème restreint suivant.

   Parmi toutes les droites de pente donnée m_0, trouver celle pour laquelle la somme des carrés des écarts est minimum.

   Pour commencer, on pose que l'équation de la droite cherchée est :

$$y = m_0 x + h$$

   où h est le coefficient à déterminer. A partir de ceci, on peut poser que, pour tout i, l'écart e_i est donné par $e_i = y_i - (m_0 x_i + h)$. La somme des carrés de ces écarts est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} ((y_i - m_0 x_i) - h)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_0 x_i)^2 - 2h \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_0 x_i) + n \cdot h^2 \end{aligned}$$

   Cette expression est un trinôme du second degré en b. Il est représenté par une parabole ouverte vers le haut car le coefficient b^2 est multiplié par n, un nombre positif. Ce trinôme est donc minimal pour [1] :

$$h_{min} = -\frac{-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - m_0 x_i)}{2n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - m_0 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{y} - m_0 \overline{x}$$

   Cette relation signifie que parmi toutes les droites de pente m_0, celle d'équation $y = m_0 x + h_{min}$, pour laquelle la somme des carrés des écarts est minimum, est celle qui passe par le point moyen $\omega(\overline{x}; \overline{y})$. En effet, ce dernier vérifie l'équation de la droite comme $\overline{y} = m_0 \overline{x} + h_{min}$. On en déduit que la droite de régression passe nécessairement par le point moyen ω.

2) Nous sommes donc ramenés au problème : parmi toutes les droites qui passent par ω, trouver celle pour laquelle la somme des carrés des écarts est minimum.

   Pour ceci, on réalise une translation du système d'axe (ou un changement de variables) de manière à obtenir un nouveau système de coordonnées tel que l'origine de ce dernier corresponde au point ω. On note (X_i, Y_i) les coordonnées des n points du nuage dans ce nouveau système d'axes. Ainsi, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on a la relation suivante entre anciennes et nouvelles coordonnées :

$$x_i = \overline{x} + X_i \qquad \text{et} \qquad y_i = \overline{y} + Y_i$$

1. Le trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a > 0$, est minimum pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$ qui correspond à l'abscisse du sommet de la parabole

Dans ce nouveau système d'axes, la droite recherchée passe donc par l'origine et admet une équation de la forme :

$$Y = mX$$

où m est le coefficient à déterminer. Les écarts e_i sont donc donné par $e_i = Y_i - mX_i$. La somme des carrés de ces écarts est :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - mX_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2m \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i + m^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2\end{aligned}$$

Cette expression est encore un trinôme du second degré en m. Comme le coefficient de a^2 est positif, ce trinôme est minimum pour

$$m_{min} = -\frac{-2\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{2\sum_{i=1}^{n} X_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

En revenant aux coordonnées $(x_i; y_i)$ (voir exercices pour la démonstration), la droite $D_{y/x}$ d'ajustement de y par rapport à x passe par le point $\omega(\overline{x}; \overline{y})$ et a pour pente

$$m = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

On appelle le nombre σ_{xy} la **covariance de x et y**. Le nombre σ_x^2 correspond lui à la varaince de x.

Méthode de calcul et représentation graphique

1. Dans un tableau, on effectue le calcul des moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

2. On calcule :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} \quad \text{et} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

   ce qui nécessite, dans le tableau, le calcul des valeurs $x_i y_i$ et x_i^2.

   On en déduit :

$$m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

   qui est la pente de la droite.

3. On écrit l'équation de la droite $D_{y/x}$ d'ajustement de y par rapport à x (elle passe par le point $\omega(\overline{x}; \overline{y})$) :

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$

4. On trace cette droite sur le graphique. Pour cela, $D_{y/x}$ passant par $\omega(\bar{x}, \bar{y})$, il suffit de trouver un autre point de cette droite.

Remarques

1) Certaines calculatrices ont des fonctions statistiques qui fournissent ces valeurs très rapidement. Consultez le mode d'emploi de votre machine !
2) On pourrait également calculer la pente m en utilisant les X_i et Y_i définis dans la partie mise en place de la méthode. Cette démarche peut être intéressante si les valeurs des x_i et y_i sont "grandes", mais regroupées autour des moyennes, afin d'obtenir obtenir des produits et des carrés, dans le tableau, moins "grands".

Exemple

On reprend l'exemple sur la taille (caractère x) et la masse (caractère y) de 9 personnes. On complète tout d'bord le tableau suivant :

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
1	155	60	9'300	24'025
2	158	58	9'164	24'964
3	160	62	9'920	25'600
4	161	64	10'304	25'921
5	164	62	10'168	26'896
6	167	70	11'690	27'889
7	169	71	11'857	27'889
8	170	68	11'560	28'900
9	172	72	12'384	29'584
$\sum$	1'476	587	96'489	242'340

D'après ce tableau, on peut calculer :

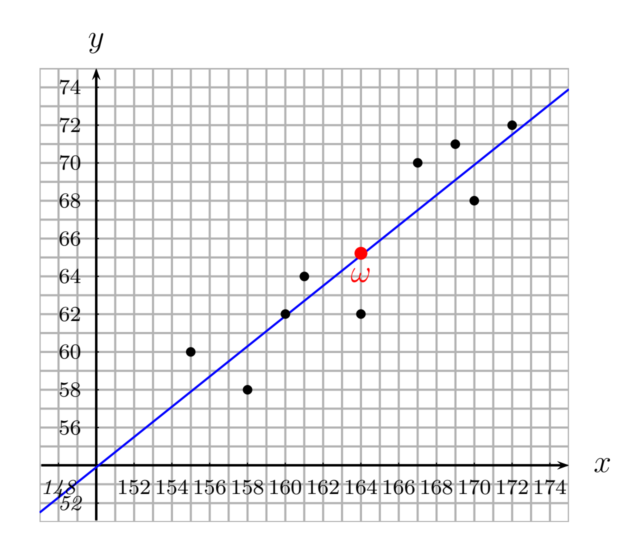
– $\bar{x} = \dfrac{1'476}{9} = 164$ *et* $\bar{y} = \dfrac{587}{9} = 65,22$

– $\sigma_{xy} = \dfrac{96'489}{9} - 164 \cdot 65,22 = 24,55$ *et* $\sigma_x^2 = \dfrac{242'340}{9} - 164^2 = 30,66$

– *D'où* $m = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = 0,80$.

Équation de $D_{y/x}$: $y - 65,22 = 0,80 \cdot (x - 164)$, *d'où* $\boxed{y = 0,80x - 66,10}$.

Graphiquement, on obtient l'ajustement suivant :



2.2 Coefficient de corrélation linéaire

Jusqu'à maintenant, nous avons vu comment ajuster une droite à un nuage constitué de n points $(x_i; y_i)$. Par contre, nous ne nous sommes pas demandé si les points était "suffisamment" alignés pour que cette démarche ait un sens ou, de manière équivalente, si la relation qui lie chaque x_i et y_i est bien linéaire (du type $y_i = mx_i + h$).

Le coefficient de corrélation linéaire est une mesure possible de ce lien. Il détermine s'il existe une relation linéaire entre les deux caractères et donne également une indication sur la valeur de l'ajustement linéaire.

Définition 2.2
On appelle **coefficient de corrélation linéaire** relatif aux caractères x et y, le nombre réel :

$$\boxed{r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}}$$

avec $\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2}.$

Propriétés du coefficient de corrélation

1. r est un nombre réel compris entre -1 et 1.
2. Quand $|r| = 1$, tous les points sont alignés.

Remarques

1. Si $|r|$ est voisin de 1, la corrélation entre les caractères x et y est forte. Ainsi, si x augmente y va également augmenter, si r est positif, ou diminuer, si r est négatif. Les points (x_i, y_i), représentés dans un graphique, seront pratiquement alignés.
2. Si $|r|$ est voisin de 0, la corrélation entre les caractères x et y est faible. On ne pourra pas dégager une relation linéaire entre les caractères x et y.
3. $r > 0$ indique une corrélation positive, $r < 0$ indique une corrélation négative.

Méthode de calcul

1. Dans un tableau, on effectue le calcul des moyennes arithmétiques :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

2. On calcule :

$$\sigma_{xy}, \quad \sigma_x, \quad \sigma_y$$

ce qui nécessite, dans le tableau, le calcul des valeurs $x_i y_i$, x_i^2 et y_i^2.

3. On en déduit le coefficient de corrélation $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Exemples

1. *Les criquets ont un organe spécial sur leurs ailes qui produit un son lorsqu'ils frottent leurs ailes les unes contre les autres. En règle générale, plus la température est élevée, plus ils frottent leurs ailes rapidement. On a relevé les mesures suivantes :*

Température (°C) (x_i)	15	17	20	23	27
Nbre de pulsations par sec. (y_i)	$13,5$	$14,1$	$14,5$	$16,3$	$17,1$

On utilise le tableau de calcul suivant :

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
1	15	$13,5$	$202,5$	225	$182,3$
2	17	$14,1$	$239,7$	289	$198,8$
3	20	$14,5$	$290,0$	400	$210,3$
4	23	$16,3$	$374,9$	529	$265,7$
5	27	$17,1$	$461,7$	729	$292,4$
$\sum$	102	$75,5$	$1'568,8$	$2'172$	$1'149,5$

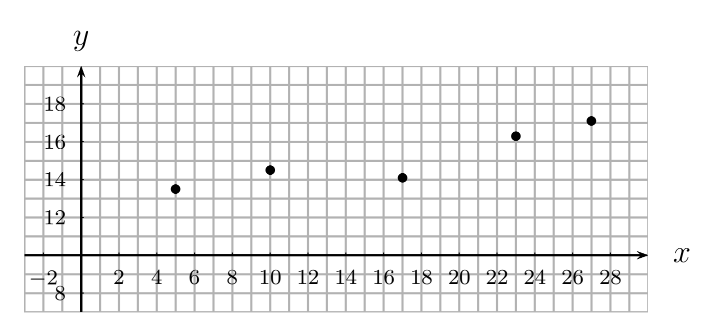
D'après ce tableau, on peut calculer :

– $\bar{x} = \dfrac{102}{5} = 20,4$ *et* $\bar{y} = \dfrac{75,5}{5} = 15,1$

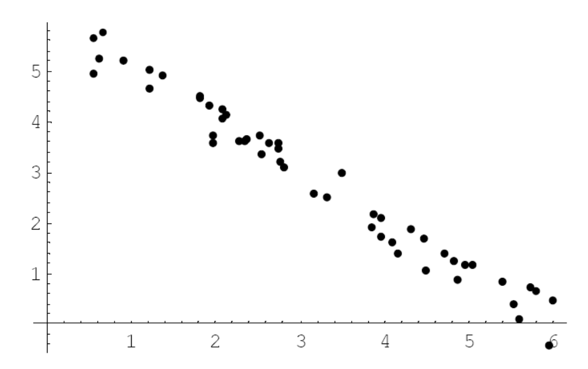
– $\sigma_{xy} = \dfrac{1'568,8}{5} - 20,4 \cdot 15,1 = 5,72$, $\sigma_x^2 = \dfrac{2'172}{5} - 20,4^2 = 18,24$ *et* $\sigma_y^2 = \dfrac{1149,5}{5} - 15,1^2 = 1,87$

– *D'où* $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0,98.$

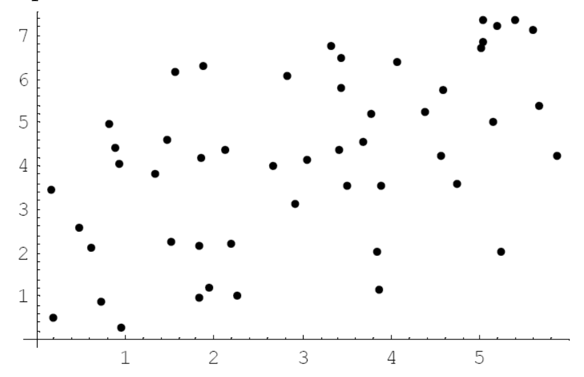
On donne ci-dessous, la représentation graphique du nuage de points considéré dans cet exemple.



2. *On a représenté deux jeux de données dans les graphiques ci-dessous.*
   – *Le coefficient de corrélation entre les caractères* x *et* y *est de* -0.98. *Les points sont pratiquement alignés. On peut supposer qu'il existe une dépendance linéaire entre les caractères* x *et* y.



– *Le coefficient de corrélation entre les caractères x et y est de* 0.53. *Il est difficile de conclure à une dépendance linéaire entre les caractères x et y.*



2.3 Ajustements non-linéaires

Lorsque le nuage de points manifeste en tendance courbe et que le coefficient de corrélation linéaire n'est pas proche de 1 en valeur absolue, l'ajustement de ce nuage par une droite est hasardeux et aboutira à des estimations de mauvaise qualité. Dans ce cas, on peut tenter d'utiliser un des modèles proposés dans ce chapitre.

En fait, chacun de ces modèles utilise le principe d'ajustement par la méthode des moindres carrés (donc ils utilisent tous une droite) mais en "transformant" au préalable les données pour obtenir un modèle linéaire à partir du modèle non-linéaire considéré.

2.3.1 Ajustement par une fonction homographique

Les n points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une certaine hyperbole de la forme $y = \dfrac{1}{ax+b}$.

Pour utiliser la méthode des moindres carrés, on doit transformer cette expression pour obtenir une expression de la forme $v = A \cdot u + B$. On réalise ceci de la manière suivante :

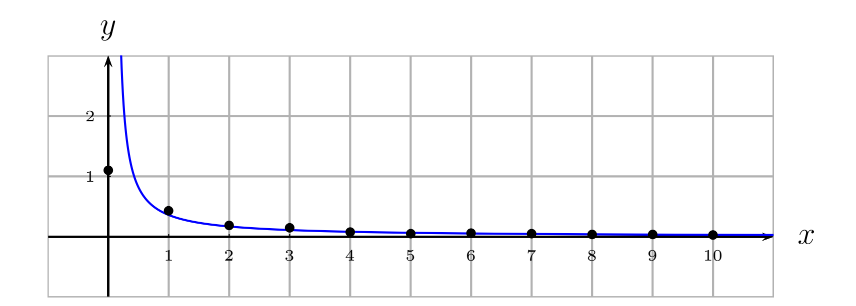
$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{v} = \underbrace{a}_{A} \cdot \underbrace{x}_{u} + \underbrace{b}_{B}$$

Méthode de calcul

1. Calculer $u_i = x_i$ et $v_i = \frac{1}{y_i}$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de v par rapport à u par la méthode des moindres carrés.

3. De l'équation $v = Au + B$, déduire l'équation de l'hyperbole d'ajustement $y = \frac{1}{ax+b}$, en utilisant que $a = A$ et $b = B$.

Par exemple, on obtient l'ajustement ci-dessous si on applique cette méthode aux données de l'exercice 6.



2.3.2 Ajustement par une fonction puissance

Les n points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une courbe représentant une fonction puissance de la forme $y = b \cdot x^a$.

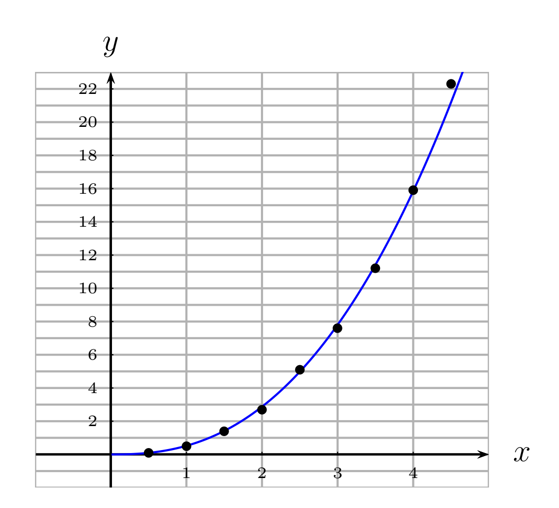
On transforme cette expression pour obtenir une expression de la forme $v = A \cdot u + B$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\ln(y) &= \ln(b \cdot x^a) \\
\ln(y) &= \ln(x^a) + \ln(b) \\
\underbrace{\ln(y)}_{v} &= \underbrace{a}_{A} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} + \underbrace{\ln(b)}_{B}
\end{aligned}$$

Méthode de calcul

1. Calculer $u_i = \ln(x_i)$ et $v_i = \ln(y_i)$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de v par rapport à u par la méthode des moindres carrés.
3. De l'équation $v = Au + B$, déduire l'équation de la courbe d'ajustement $y = b \cdot x^a$, en utilisant que $a = A$ et $b = e^B$.

Par exemple, on obtient l'ajustement ci-dessous si on applique cette méthode aux données de l'exercice 7.



2.3.3 Ajustement par une fonction exponentielle

Les n points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une courbe représentant une fonction exponentielle de la forme $y = b \cdot a^x$.

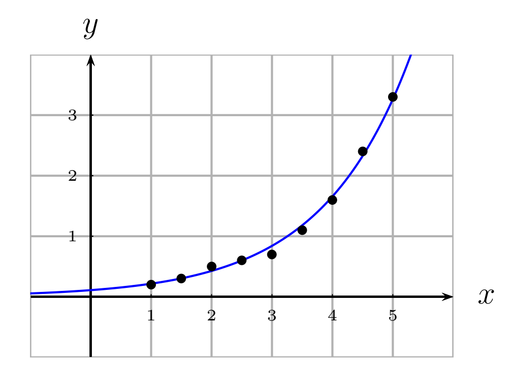
On transforme cette expression pour obtenir une expression de la forme $v = A \cdot u + B$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(b \cdot a^x) \\ \ln(y) &= \ln(a^x) + \ln(b) \\ \underbrace{\ln(y)}_{v} &= \underbrace{\ln(a)}_{A} \cdot \underbrace{x}_{u} + \underbrace{\ln(b)}_{B} \end{aligned}$$

Méthode de calcul

1. Calculer $u_i = x_i$ et $v_i = \ln(y_i)$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de v par rapport à u par la méthode des moindres carrés.
3. De l'équation $v = Au + B$, déduire l'équation de la courbe d'ajustement $y = b \cdot a^x$, en utilisant que $a = e^A$ et $b = e^B$.

Par exemple, on obtient l'ajustement ci-dessous si on applique cette méthode aux données de l'exercice 8.



2.3.4 Ajustement par une fonction logarithme

Les n points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une courbe représentant une fonction logarithme de la forme $y = a\ln(x) + b$.

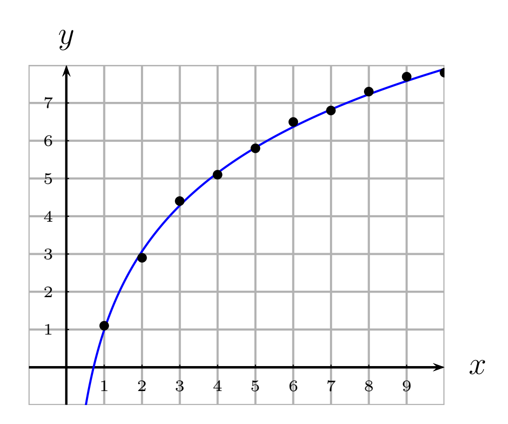
On transforme cette expression pour obtenir une expression de la forme $v = A \cdot u + B$ de la manière suivante :

$$\underbrace{y}_{v} = \underbrace{a}_{A} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} + \underbrace{b}_{B}$$

Méthode de calcul

1. Calculer $u_i = \ln(x_i)$ et $v_i = y_i$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de v par rapport à u par la méthode des moindres carrés.
3. De l'équation $v = Au+B$, déduire l'équation de la courbe d'ajustement $y = a\ln(x)+b$, en utilisant que $a = A$ et $b = B$.

Par exemple, on obtient l'ajustement ci-dessous si on applique cette méthode aux données de l'exercice 9.



2.4 Exercices

1) Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,1	3,1	4,7	7,3	9,2	11,1	12,9	15,4	17	18,8

   a) Donner l'équation d'une droite ajustant ces valeurs
      1) à l'œil ;
      2) par la méthode Mayer ;
      3) par la méthode des moindres carrés.
   b) Dessiner les droites obtenues en 2 et en 3.
   c) Interpoler la valeur de $\hat{y}$ pour $x = 6,3$ grâce aux droites obtenues en 2 et en 3.

2) Le tableau ci-dessous compare des voitures de même catégorie. Il met en rapport la cylindrée (en pouces) et le nombre de miles parcourus avec un gallon d'essence ($3,78$ litres aux USA).

Voiture	Cylindrée	Miles par gallon
VW Rabbit	97	24
Datsun 210	85	29
Chevette	98	26
Dodge Omni	105	24
Mazda 626	120	24
Oldsmobile Starfire	151	22
Mercury Capri	140	23
Toyota Celica	134	23
Datsun 810	146	21

   a) Donner l'équation d'une droite ajustant ces valeurs
      1) à l'œil ;
      2) par la méthode des moindres carrés.
   b) Dessiner la droite obtenue en 2.
   c) Estimer le nombre de miles par gallon d'une voiture ayant une cylindrée de 125 grâce à la droite obtenue en 2.

3) Le tableau de la page suivante montre l'évolution des temps olympiques du 200 m plat, en secondes, pour les hommes et pour les femmes.
   a) Donner l'équation des droites (celle des performances des hommes et celle des performances des femmes) ajustant ces valeurs
      1) à l'œil ;
      2) par la méthode des moindres carrés.

b) Dessiner les droites obtenues en 2.

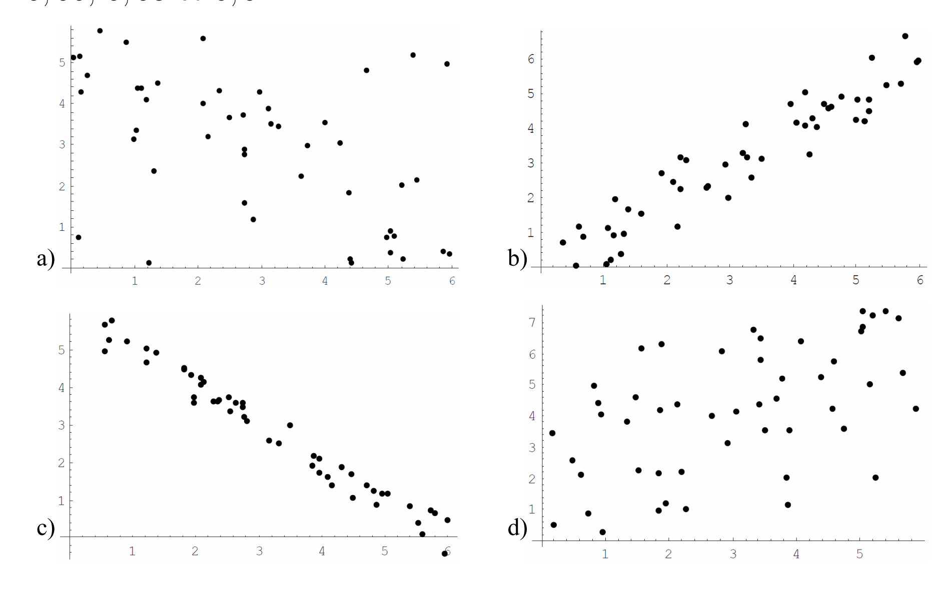
c) Estimer les temps olympiques de 2004 et 2008 puis les comparer aux valeurs réelles. Constats ?

d) D'après les droites obtenues en 2, en quelle année les femmes courront-elles le 200 m plat aussi vite que les hommes ?

e) Ces ajustements affines sont-ils adéquats ?

	200 m hommes	200 m femmes
Londres 1948	21,1	24,4
Helsinki 1952	20,7	23,7
Melbourne 1956	20,6	23,4
Rome 1960	20,5	24,0
Tokyo 1964	20,3	23,0
Mexico 1968	19,83	22,5
Munich 1972	20,00	22,40
Montréal 1976	20,23	22,37
Moscou 1980	20,19	22,03
Los Angeles 1984	19,80	21,81
Séoul 1988	19,75	21,34
Barcelone 1992	19,73	21,72
Atlanta 1996	19,32	22,12
Sydney 2000	20,09	21,84
Athènes 2004		
Pékin 2008		

4) Rendre à chacun des nuages de points ci-dessous sons coefficient de corrélation linéaire : $-0,98$, $-0,50$, $0,53$ et $0,94$



5) Dans une entreprise qui fabrique et vend un seul produit, le relevé des ventes mensuelles et des charges mensuelles correspondantes (en milliers de francs) donne le tableau suivant :

Ventes	18	16	21	22	29	28	10	11	27	25	26	19
Charges	20	16	18	21	25	24	12	12	22	20	22	16

a) Donner l'équation de la droite ajustant ces valeurs par la méthode des moindres carrés.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

6) Ajuster ce nuage de points par une hyperbole de la forme $y = \dfrac{1}{ax+b}$.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,1	0,43	0,19	0,15	0,08	0,05	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03

7) Ajuster ce nuage de points par une fonction puissance de la forme $y = bx^a$.

x_i	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
y_i	0,1	0,5	1,4	2,7	5,1	7,6	11,2	15,9	22,3	28,1

8) Ajuster ce nuage de points par une fonction exponentielle de la forme $y = ba^x$.

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
y_i	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	1,1	1,6	2,4	3,3

9) Ajuster ce nuage de points par une fonction logarithme de la forme $y = a\ln(x) + b$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,1	2,9	4,4	5,1	5,8	6,5	6,8	7,3	7,7	7,8

2.5 Solutions des exercices

1) a) 1) $y = 1,99x - 0,9$ 2) $y = 1.992x - 0896$ c) 1) $\hat{y} = 11.64$ 2) $\hat{y} = 11.65$

2) a) 2) $y = -0.08x + 34.01$ c) 2) $\hat{y} = 23,54$

3) hommes : a) 2) $y = 66.34 - 0.02x$ c) 19.44 et 19.35
femmes : a) 2) $y = 122.17 - 0.05x$ c) 21.17 et 20.97

d) en 2068

4) a) -0.50 b) 0.94 c) -0.98 d) 0.53

5) a) $y = 0,64x + 5,61$ b) $0,95$

6) $y = \dfrac{1}{3,1x - 0,33}$

7) $y = 0,52x^{2,45}$

8) $y = 0,11 \cdot 1,97^x$

9) $y = 3\ln(x) + 0,99$